CRBM et photons

Olivier MAURICE. Alain REINEIX

GERAC, 3 av. Jean d'Alembert, 78190 Trappes. olivier.maurice@gerac.com
Xlim, 120 av. Albert Thomas, 80180 Limoges. alain.reineix@xlim.fr

Résumé

Pour pouvoir maîtriser l'interprétation des résultats d'essais de compatibilité electromagnétique (CEM) en chambres réverbérantes à brassage de modes, il faut maîtriser la nature du champ et ses couplages dans les différents environnements de test et réel. La nature du champ ne peut être comprise qu'en abordant ses propriétés quantiques. Cette étude permet d'éclaircir des points restant obscurs dans une description classique. Ensuite, la relecture de l'équation de Poynting et des réflexions sur ce vecteur permettent de voir le lien entre les différentes formes d'énergie et les différentes natures du champ y correspondant. L'établissement de l'équation du problème complet met en évidence la façon dont ces différents aspects du champ peuvent intervenir dans un certain problème. Ce dernier résultat peut servir de base à des études théoriques plus poussées.

Le travail présenté a été réalisé dans le cadre d'une thèse conduite au laboratoire Xlim sous la direction du Pr. Alain Reineix. Ces réflexions ont pour but la décomposition des interactions décrites dans une jauge de Coulomb en champs transverses et longitudinaux, ou plus généralement en champs photoniques virtuels et réels.

1 Photon, champ coulombien et impulsion

La notion d'onde plane est souvent considérée dans des situations où pourtant elle n'existe pas. Une onde plane est une onde où les champs électrique et magnétique forment un trièdre direct. Mais cette définition ne suffit pas. On peut trouver des cas où des champs électrostatiques et magnétostatiques forment ce trièdre sans pour autant former une onde plane. Nous allons montrer ce point.

A la base des natures quantiques du champ on trouve une décomposition de Fourier spatiale du champ spatio-temporel. On crée un espace réciproque à partir de la transformation :

$$\mathcal{E}(k,t) = \frac{1}{2\pi^{\frac{3}{2}}} \int d^3r E(r,t) \tag{1}$$

(les quantités $k, r, \mathcal{E}, E$ sont évidemment vectorielles). Dans l'espace réciproque, les équations de Maxwell deviennent :

$$\begin{cases} ik \cdot \mathcal{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ ik \cdot \mathcal{B} = 0 \\ ik \times \mathcal{E} = -\dot{\mathcal{B}} \\ ik \times \mathcal{B} = \frac{1}{c^2}\dot{\mathcal{E}} + \frac{1}{\epsilon_0 c^2}\mathcal{J} \end{cases} \tag{2}$$

Dans l'espace réciproque, la notion de champ longitudinal ou transverse est claire. Le champ est longitudinal quand il est parallèle à k, transverse lorsqu'il est transverse à k. Nous verrons que, pour autant, la création de l'espace réciproque n'est pas triviale.

L'énergie contenue dans le champ est donnée par : $\frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r E^2$ soit dans l'espace réciproque $\frac{\epsilon_0}{2} \int d^3k \mathcal{E}^* \mathcal{E}$. Décomposons le champ en une composante longitudinale $\mathcal{E}_L$ et une composante transverse $\mathcal{E}_T$. On trouve :

$$\frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r E^2 = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3k \, |\mathcal{E}_L|^2 + \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3k \, |\mathcal{E}_T|^2 \tag{3}$$

Le premier terme doit correspondre à l'énergie coulombienne V_{coul} des interactions électriques entre particules. Le second terme est l'énergie du champ transverse H_{trans}. L'énergie totale du système s'écrit :

$$H = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \dot{r}_{\alpha}^{2} + V_{coul} + H_{trans} \quad (4)$$

Le premier terme est l'énergie cinétique des particules.

2 Variables normales

On peut réécrire deux des équations de Maxwell pour les champs transverses dans l'espace réciproque sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathcal{B}} = -ik \times \mathcal{E}_T \\ \dot{\mathcal{E}}_T = ic^2 k \times \mathcal{B} - \frac{1}{\epsilon_0} J_T \end{array} \right. \quad (5)$$

Le terme de champ longitudinal peut être exprimé en fonction des charges. Il ne constitue donc pas une variable dynamique.

Réécrivons les équations précédentes sous une forme un peu différente :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathcal{E}}_T = ic^2 k \times \mathcal{B} - \frac{1}{\epsilon_0} J_T \\ k \times \dot{\mathcal{B}} = ik^2 \mathcal{E}_T \end{array} \right. \quad (6)$$

En l'absence de sources on déduit de ce système d'équations : $\partial_t \left(\mathcal{E} \pm k \times \mathcal{B}\right) = i \left(c^2 k \times \mathcal{B} \pm k^2 \mathcal{E}\right)$

Cette relation invite à définir un nouveau champ α tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = i \left(c^2 k \times \mathcal{B} + k^2 \mathcal{E}\right) \\ \alpha^* = i \left(c^2 k \times \mathcal{B} - k^2 \mathcal{E}\right) \end{array} \right. \quad (7)$$

Le champ électrique de l'espace primal s'exprime alors par transformée inverse de Fourier spatiale en fonction des variables normales α :

$$E(r,t) = \frac{1}{ik^2 \left(2\pi\right)^{\frac{3}{2}}} \int d^3k \left\{ \alpha e^{ikr} - \alpha^* e^{-ikr} \right\} \quad (8)$$

De cette égalité on déduit que le champ libre (on trouve une expression similaire pour le champ magnétique) est décomposable en série d'ondes planes progressives. Mais, comme le souligne [1] cette décomposition n'est valable qu'en l'absence de sources. Dans le cas contraire, des échanges d'énergie s'effectuent entre les particules et le champ et il faut considérer l'ensemble des termes de l'hamiltonien pour résoudre le problème. On peut par exemple légitimement se poser la question de la limite de validité d'une décomposition des champs en ondes planes dans les mesures en champs proches où par définition, le champ est lié aux sources.

3 Photons

Les éléments introduit précédemment sont de premières pistes pour poser déjà des questions non triviales. Entre autre ils posent clairement le problème des conditions d'application de l'idée suivant laquelle le champ est décomposable en ondes planes. Le résultat peut être formulé en disant "à partir de quand considérons-nous que nous sommes en espace libre ?". Il est clair en tout cas que dans les conditions d'ondes guidées ou de champ proche, la condition d'espace libre n'est pas atteinte. Le champ peut-il être considéré en espace libre dans un volume éloigné des parois dans une CRBM ? C'est la question à laquelle nous allons tenter de répondre.

Pour cela il faut se donner un critère le plus simple précis sur ce que l'on considère comme preuve d'espace libre. La définition d'onde plane est finalement peut-être insuffisamment précise, car comme le souligne Jackson, on peut avoir des champs électrique et magnétique perpendiculaires sans pour autant avoir une onde plane. C'est typiquement le cas dans un coaxial où les champs guidés sont statiques et présentent pourtant toutes les caractéristiques apparentes d'une onde plane. Un autre point qui interroge est le fait que l'on admet en général que deux photons ne peuvent interagir. De fait comment pourraient-ils "s'additionner" pour former une onde stationnaire ?

Si l'on raisonne au niveau particule, nous allons voir que le photon peut avoir une définition claire par le biais de son impulsion. On admet ensuite le fait que deux photons ne peuvent additionner ou soustraire leurs impulsions par chocs. C'est une façon précise de réécrire l'interrogation précédente. Un autre point est qu'il est finalement impossible de mesurer le champ de photons. Dès que l'on insère une sonde, on implique une interaction entre les champs évanescents de la sonde et le photon, on se replace donc dans la situation du champ avec sources et le photon ne peut être mesuré directement. On ne peut que déduire son apport indirectement.

Bref le photon se retrouve au centre de nos interrogations, détaillons de fait son apparition telle que présentée dans [2].

Dans la jauge de Coulomb, le champ électromagnétique libre satisfait aux équations :

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},\ \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},\ \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \tag{9}$$

Il respecte aussi l'équation de propagation :

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0 \tag{10}$$

Cette équation de propagation n'admet de solution unique que si l'on fixe des conditions aux limites. C'est d'ailleurs en soit une difficulté conceptuelle, puisqu'en espace libre on n'a pas de conditions limites évidentes. On ne veut pas se doter de conditions limites réflexives ou conductrices. Simplement on considère un volume L qui autorise un flux de puissance au travers de ses parois. Soit des conditions aux limites périodiques :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}(0, x_2, x_3) = \mathbf{A}(L, x_2, x_3) \\ \mathbf{A}(x_1, 0, x_3) = \mathbf{A}(x_1, L, x_3) \\ \mathbf{A}(x_1, x_2, 0) = \mathbf{A}(x_1, x_2, L) \end{array} \right. \tag{11}$$

On développe alors $\mathbf{A}(r,t)$ suivant une série de Fourier sur L, par exemple en 1 dimension pour une polarisation λ :

$$\mathbf{A}_\lambda = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1 cos\left(2\pi\frac{r}{L}\right) + \ldots + \mathcal{B}_1 sin\left(2\pi\frac{r}{L}\right) + \ldots \tag{12}$$

Soit :

$$\mathbf{A}_\lambda = \mathcal{A}_0 + \sum_n \mathcal{A}_n cos\left(n2\pi\frac{r}{L}\right) + \mathcal{B}_n sin\left(n2\pi\frac{r}{L}\right) \tag{13}$$

Cette décomposition peut aussi s'écrire :

$$\mathbf{A}_\lambda = \sum_n c_{\lambda n} e^{in2\pi\frac{r}{L}} + c^*_{\lambda n} e^{-in2\pi\frac{r}{L}} \tag{14}$$

Nous pouvons négliger la composante continue dans le développement car de toute façon elle ne saurait être raccrochée à un champ dynamique. On a par exemple :

$$\begin{array}{l} c_{\lambda n}(t) = \frac{1}{2}(A_n - iB_n) = \ldots \\ \ldots \frac{1}{2}\frac{2}{L}\left[\int_0^L dr \mathbf{A}_\lambda(r,t)\, cos\left(n2\pi\frac{r}{L}\right)\right] \ldots \\ \ldots - \frac{1}{2}\frac{2}{L}\left[i\int_0^L dr \mathbf{A}_\lambda(r,t)\, sin\left(n2\pi\frac{r}{L}\right)\right] \end{array} \tag{15}$$

(nous avons utilisé ici une formulation un peu différente de celle employée usuellement et partant de la transformée de Fourier et non de sa série).

En remplaçant 14 dans 9 on trouve pour une composante n :

$$\partial_t{}^2 \left(c_\lambda(t) + c^*_\lambda(t)\right) + \omega_n^2 \left(c_\lambda(t) + c^*_{\lambda(t)}\right) = 0 \tag{16}$$

(avec $\omega_n = cn2\pi L^{-1}$ et $c_\lambda = c_{\lambda n} exp\left(in2\pi\frac{r}{L}\right)$). C'est l'équation d'un oscillateur harmonique. Les solutions sont de la forme :

$$c_\lambda + c^*_\lambda = f_{n\lambda} e^{-i\omega_n t} + f^*_{n\lambda} e^{i\omega_n t} \tag{17}$$

On peut se doter d'une base modale en écrivant :

$$\psi_{n\lambda}(r) = e^{in2\pi\frac{r}{L}},\quad \psi^*_{n\lambda}(r) = e^{-in2\pi\frac{r}{L}} \tag{18}$$

Le potentiel vecteur se développe alors comme :

$$\mathbf{A}_\lambda(r,t) = \sum_{n\lambda} f_{n\lambda} e^{-i\omega_n t}\psi_{n\lambda}(r) + f^*_{n\lambda} e^{i\omega_n t}\psi^*_{n\lambda}(r) \tag{19}$$

On retrouve bien l'expression (1.140) page 23 de [2]. Ce sont les conditions initiales qui fixent les coefficients $f_{n\lambda}$. On a dans cette expression

$$\psi_{n\lambda} = \psi_{n\lambda}\mathbf{u}_\lambda$$

On s'aperçoit alors qu'en posant :

$$f_{n\lambda} = \left(\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega_n}\right)^{1/2} \alpha_{n\lambda} \tag{20}$$

Le développement du potentiel vecteur devient :

$$\mathbf{A}(r,t) = \left(\frac{\hbar}{\epsilon_0 L^3}\right)^{1/2} \sum_{n\lambda} \frac{\mathbf{u}_\lambda}{\sqrt{2\omega_n}} \dots$$
$$\dots \left[\alpha^*_{n\lambda} e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_n t)} + \alpha_{n\lambda} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_n t)}\right] \tag{21}$$

L'énergie électromagnétique stockée que l'on écrit : $E^{em} = \int_\Lambda dr \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 |E|^2 + \mu_0^{-1}|B|^2\right)$

En utilisant le potentiel vecteur cette expression devient :

$$E^{em} = \frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{3}\int_\Lambda d\mathbf{r}\left[\epsilon_0\left(\frac{\partial \mathbf{A}^\beta}{\partial t}\right)^2 + \mu_0^{-1}\left|\nabla \mathbf{A}^\beta\right|^2\right] \tag{22}$$

En remplaçant le champ par son expression suivant 21 on obtient :

$$E^{em} = \sum_{n\lambda} \hbar\omega_n |\alpha_{n\lambda}|^2 \tag{23}$$

Le flux de Poynting qui s'exprime par :

$$S = \frac{1}{\mu_0}\int_\Lambda dr\,(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) \tag{24}$$

devient :

$$S = \frac{1}{\mu_0}\int_\Lambda dr\left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)\times(\nabla\times\mathbf{A}) \tag{25}$$

en remplaçant par le développement harmonique on trouve :

$$S = c^2\sum_{n\lambda}\hbar\mathbf{k}\,|\alpha_{n\lambda}|^2 \tag{26}$$

Cette dernière relation est importante. Elle stipule que $|\alpha_{n\lambda}|^2$ peut être interprété comme le nombre moyen de photons d'impulsion $\hbar\mathbf{k}$ et de polarisation λ. Le photon apparaît comme pourvu d'une impulsion, ce qui le différencie du champ simple entre autre stocké qui a une énergie quantique mais pas d'impulsion. C'est cette propriété remarquable qui va nous servir de base pour le photon et le champ radiatif. De cette impulsion née la résistance de rayonnement qui traduit le freinage des résonateurs sources du champ rayonné, une impulsion devant être transmise à chaque émission de quanta de champ. Lorsque cette impulsion est restituée, la perte par rayonnement s'annule. **Une trace de ce champ est donc la divergence du vecteur de Poynting** que l'on va étudier dans le paragraphe suivant. En pratique, une résistance de rayonnement traduit l'émission de photons. Cette résistance traduit la perte d'impulsion à l'émission. Nous allons, après avoir exprimé le bilan en champ classique, réfléchir au contexte particulier des ondes guidées et des milieux fermés pour comprendre comment y intervient le bilan sur l'impulsion.

4 Bilan d'énergie classique

Nous voulons montrer ici que l'hamiltonien 4 peut être retrouvé (doit être retrouvé) en électrodynamique classique.

Le travail instantané accompli par les champs E et B sur une charge q animée d'une vitesse v est $q\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}$, la force magnétique étant perpendiculaire à la vitesse n'induit pas de travail. On en déduit que dans un volume ν le travail instantané accompli est :

$$W = \int_\nu d^3x\mathbf{J}\cdot\mathbf{E} \tag{27}$$

En exploitant le théorème de Maxwell - Ampère, on remplace le courant dans cette expression pour obtenir (avec $\nabla\cdot(E\times H) = H\cdot\nabla\times E + E\cdot\nabla\times B$) :

$$W = -\int_\nu d^3x\left[\nabla\cdot(E\times H) + E\cdot\frac{\partial D}{\partial t} + H\cdot\frac{\partial B}{\partial t}\right] \tag{28}$$

(on ne met plus en gras les grandeurs implicitement vectorielles). On désigne par E^{em} la densité d'énergie électromagnétique totale : $E^{em} = \frac{1}{2}(E\cdot D + B\cdot H)$.

Alors on a :

$$-W = \int_\nu d^3x\left[\frac{\partial E^{em}}{\partial t} + \nabla\cdot(E\times H)\right] \tag{29}$$

La grandeur $S = E\times H$ est appelée vecteur de Poynting. Le bilan classique d'énergies électromagnétiques s'exprime donc pour un volume arbitraire par [3] :

$$\frac{\partial E^{em}}{\partial t} + \nabla \cdot S = -J \cdot E \qquad (30)$$

On retrouve de façon classique l'analogie avec le bilan en mécanique quantique donné en 4. Les énergies cinétiques des particules se retrouvent dans le terme avec J tandis que l'hamiltonien transverse correspond au flux de Poynting. Enfin l'énergie coulombienne couvre à la fois l'énergie électrique stockée et l'énergie magnétique stockée. Cette dernière est équivalente à cette première vue d'une particule : en effet une particule en mouvement dans un référentiel comprenant un courant subit un champ magnétique, mais le même problème formulé dans le référentiel de la particule se transforme en force de Coulomb.

Parmi les résultats importants que l'on peut déduire de ce bilan on trouve la quantité de mouvement du champ électromagnétique souvent notée g telle que : $g = \frac{S}{c^2}$. Comme nous avons identifié les photons comme porteurs de l'impulsion du champ, on retrouve ici cette idée confirmée et le lien entre le vecteur de Poynting et cette grandeur d'impulsion. D'autre part dans le bilan d'énergie on trouve le flux du vecteur de Poynting et non le vecteur directement. Cette apparition du flux permet d'écarter les solutions d'ondes trans-électromagnétiques qui n'en sont pas pour autant des ondes planes au sens d'ensembles de photons. Ainsi l'onde TEM d'une ligne, de divergence nulle sur un tronçon quelconque de la ligne n'est pas une onde plane photonique. Elle résulte d'ailleurs du champ coulombien des charges portées par la ligne et du champ magnétostatique des courants de la ligne. Il s'agit du terme E^{em} dont rien n'interdit qu'il dépende du temps ([3] page 271, 3° paragraphe). L'impulsion consommée par la création du champ est rendue par interactions entre les deux conducteurs de la ligne.

Considérons un système électromagnétique passif arbitraire, linéaire à deux bornes d'accès. Une surface A fermée entoure complètement ce système sauf une surface A' correspondant à l'accès, forcément ouvert. En traduisant en harmonique la relation 30 et en notant w_e l'énergie stockée électrique et w_m son pendant magnétique, n étant une normale à A en tout point de A, le bilan de puissance s'écrit :

$$\tfrac{1}{2} I_i^* V_i = \tfrac{1}{2} \int_\nu J^* \cdot E d^3x + \dots$$

$$\dots + 2i\omega \int_\nu (w_e - w_m)\, d^3x + \oint_{A-A'} daS \cdot n$$

V_i et I_i sont les tensions et courants relevés sur le port d'accès au système.

L'impédance relevée à l'entrée de ce système $Z = R + iX$ doit donc s'écrire :

$$\begin{cases} R = \frac{1}{|I_i|^2} \left(\mathcal{R} \int_\nu d^3x J^* \cdot E + 2 \oint_{A-A'} S \cdot n da \right) + \dots \\ \dots + \frac{1}{|I_i|^2} \left(4\omega \mathcal{I} \int_\nu d^3x \,(w_m - w_e) \right) \\ X = \frac{1}{|I_i|^2} \left(4\omega \mathcal{R} \int_\nu d^3x \,(w_m - w_e) - \mathcal{I} \int_\nu J^* \cdot E d^3x \right) \end{cases} \qquad (31)$$

Ce résultat important montre que d'une part, l'impédance d'entrée d'une antenne alimentant une CRBM doit redonner l'image des échanges d'énergies recensées dans cette expression et d'autre part que si le flux de Poynting est nul, les seules énergies en présence sont les pertes dans des éléments dispersifs véhiculant des courants et les énergies stockées sous forme électromagnétique. Aucun photon ni flux radiatif ne doivent être présents.

Le flux du vecteur de Poynting va revêtir des intégrales différentes au cours du temps, dans un référentiel d'espace-temps qui évolue avec le flux. Une impulsion de champ émise de l'antenne ne voit les murs de la CRBM qu'après un temps écoulé. L'espace couvert permet de définir un flux non nul au début, qui traduit la puissance perdue dans l'émission des photons. Puis ces photons atteignent les murs de la chambre et transmettent leurs impulsions aux charges en créant des courants induits. Le bilan d'impulsion devient nul et le flux également. C'est le temps de "charge" de la chambre qui donne la valeur au-delà de laquelle cet équilibrage est complet. Dès lors la divergence du vecteur de Poynting est nulle car aucun champ n'est émis à l'extérieur de la chambre (on néglige ici le champ infrarouge thermique rayonné). Les champs dans la chambre sont corrélés aux charges dans les murs. Au niveau de l'antenne d'émission, la puissance apportée permet de compenser les pertes dans les murs et alimente les zones de stockage. Si cette source s'arrête, les zones de stockages vont alimenter les pertes et rapidement décroître. Un flux est maintenu entre les zones de stockage qui équilibre ces dernières dont l'amplitude n'est pas reliée à la distance à la source mais à l'existence de modes propres locaux ou globaux. Une autre façon d'exprimer cela est de dire que la seule connaissance des charges dans les murs (et de leurs débits) suffit à connaître le champ dans le volume. Ce n'est pas le cas s'il y a rayonnement, une antenne n'a ainsi aucune connaissance de ce que devient le champ qu'elle rayonne.

On peut comprendre que par ce raisonnement, tout volume clos est à terme source de zones de stockages et de flux d'échanges mais pas de flux radiatifs. Cette interprétation peut être vérifiée en mesurant l'impédance d'entrée d'une antenne alimentant une cavité. Cependant le couplage vient moduler la vue de ces énergies.

En mécanique quantique, la quantification du champ d'énergie stockée correspond à des photons dits virtuels. Par exemple, Feynman [4] calcule l'interaction relativiste de particules et souligne l'interaction de Coulomb comme la composante reliée aux photons virtuels. Les photons ne pouvant interagir entre eux, peut-on imaginer l'existence d'ondes stationnaires en espace libre ? Quel est le processus des ondes stationnaires en ondes guidées ?

5 Ondes stationnaires

Même en ondes entretenues, on ne peut cumuler dans l'espace libre plus que la simple somme des champs en un point de l'espace-temps. Ceci est une conséquence du fait que par définition en espace libre, le champ ne peut être confiné et se propage à l'infini. Dans un système fermé d'ondes guidées, le stockage devient possible par les ondes stationnaires qui s'établissent au niveau des charges. Le champ n'en est que l'image. Or le cumul des charges lui est possible, comme dans un condensateur. Ce phénomène est une autre confirmation du fait que le champ concerné est un champ lié et non un champ libre. Si l'on accepte la terminologie d'onde plane pour le photon, on accepte alors l'idée que **les ondes stationnaires ne sont pas des sommes d'ondes planes**, constat également formulé par [1]. En ondes guidées, nous sommes en présence de modes "TEM" qui ne sont pas des ondes planes. La distinction est importante, pas au sens étymologique, mais au sens où le mode TEM n'engendre pas de résistances de rayonnement. Ces réflexions avaient été menées dans l'étude [7].

6 Modélisation topologique

Une approche topologique va nous permettre de mieux comprendre les mécanismes du système complet, chambre plus objet sous test. Un point important relevé dans les développements précédents est que l'expression de l'impédance par le biais des énergies est porteuse de l'information sur les échanges qui se réalisent dans le volume. Le point difficile est d'appréhender l'impact de la fonction de couplage entre le champ qui s'établit dans le volume et l'excitation externe.

Pour débuter notre réflexion nous nous intéressons à l'exemple canonique donné par le professeur Jean-Jacques Labarthe [5]. On considère un champ électromagnétique oscillant dans une cavité autour d'un mode particulier non entretenu. L'énergie de l'oscillation décroît au cours du temps suivant une loi de la forme : $E(t) = E(0)e^{-2\alpha t}$. L'énergie perdue par pseudo-période $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ est $\delta E = 2\alpha T E(t)$. Le coefficient d'amortissement α est donné par le coefficient de qualité Q de la cavité tel que :

$$\alpha = \frac{\omega_0}{2Q} \tag{32}$$

Le coefficient de qualité exprime le rapport entre l'énergie stockée et l'énergie dissipée. On montre ([3] §§ 8.1, 8.7 et 8.8) que :

$$Q = K\frac{\mu}{\mu_c}\left(\frac{V}{S\delta}\right) \tag{33}$$

K étant un facteur dépendant du mode, proche de 1. μ_c est la perméabilité magnétique du conducteur des parois de la cavité. V est le volume de la cavité, S sa surface interne et δ est l'effet de peau : $\delta = \sqrt{2}\left(\mu_c\omega_0\sigma\right)^{-1/2}$, σ étant la conductivité du matériau des parois.

Du point de vue topologique, une cavité autour d'un mode peut être modélisée par un résonateur. Dans l'espace des branches, une branche porte les énergies de dissipation dans les parois (résistance R) et une branche portent l'énergie électrostatique emmagasinée (condensateur C). Ce système "bibranche" est ensuite regardé depuis l'espace des mailles. Une connectivité très simple ([1; 1]) relie les deux branches et l'on ajoute dans cet espace l'énergie magnétique stockée par une inductance propre à la maille. Au final on trouve une impédance de maille donnée par : $Z = R + i\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) \approx R\left(1 + 2iQ\frac{\delta\omega}{\omega_0}\right)$[5][6]. Quand on compare cette expression avec 31, on voit que pour la partie imaginaire, le terme C représente la contribution w_e en énergie et que l'inductance L couvre à la fois la partie réelle de w_m et la partie imaginaire de l'effet de peau dans $\mathcal{I}\int_\nu J^* \cdot Ed^3x$. Pour la partie réelle on a évidemment l'effet Joule dans les parois, le rayonnement de photons mais aussi la partie imaginaire des contributions du champ en w_m et w_e. A quoi peut bien correspondre ce terme ? Il s'agit des pertes dans les milieux, par exemple la conductance d'un diélectrique. Le complexe $\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''$ va engendrer des pertes réelles sous forme de conductance. Il en va de même pour la perméabilité magnétique : $\mu = \mu' - j\mu''$. Considérons une cavité vide de ces éléments.

Si l'on plonge une petite boucle pour créer du champ dans la cavité, cela revient à créer un second réseau de branches résistives (une porte une fém e et une résistance de générateur R_0, l'autre la résistance du circuit fermé que constitue la boucle R_b), complété de même dans l'espace des mailles par une inductance de boucle L_b. Le couplage des deux réseaux est traduit par une mutuelle inductance M telle que, si k est le vecteur des courants de mailles :

$$\left\{\begin{array}{l} e = (i\omega L_b + R_0 + R_b)\,k^1 + iM\omega k^2 \\ 0 = iM\omega k^1 + \left(R + i\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right)k^2 \end{array}\right. \tag{34}$$

En toute rigueur l'insertion de la sonde dans la cavité modifie les composants du résonateur. Mais nous supposerons ici la sonde très petite et modifiant ces composants au second ordre. L'impédance vue de l'entrée de la sonde est alors donnée par :

$$Z_E = \frac{e - R_0k^1}{k^1} = \left\{ i\omega L_b + R_b + \frac{M^2\omega^2}{\left[R + i\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right]}\right\} \tag{35}$$

Comme le coefficient de qualité est aussi donné par :

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$$

on peut écrire :

$$Z_E \approx \left\{ i\omega L_b + R_b + \frac{M^2\omega^2/R}{\left(1 + i2Q\frac{\delta\omega}{\omega_0}\right)}\right\} \tag{36}$$

En notant l'acuité $a_\omega = \delta_\omega/\omega_0$ et le coefficient de couplage $\beta = M^2\omega^2/R$ on obtient :

$$Z_E \approx \left(R_b + \frac{\beta}{1 + 4Q^2a_\omega^2}\right) + i\left(\omega L_b - 2Q\frac{a_\omega\beta}{1 + 4Q^2a_\omega^2}\right) \tag{37}$$

Si le coefficient de couplage est assez fort, Q tend vers $2\omega_0/\delta\omega$. Dans ce cas

$$Z_E \approx (R_b + 0,06\beta) + i\,(\omega L_b - 0,25\beta)$$

La relation 37 montre clairement que si l'on diminue le coefficient de qualité, on acroît la partie réelle de l'impédance d'entrée. On peut d'ailleurs garder la forme d'origine en écrivant à partir de 35 :

$$\begin{array}{c} Z_E = \left\{ R_b + \frac{\beta}{1+\left(\frac{L\omega - 1/C\omega}{R}\right)^2}\right\} + \ldots \\ \ldots + i\left\{ L_b\omega - \frac{(L\omega - 1/C\omega)\beta}{R\left[1+\left(\frac{L\omega-1/C\omega}{R}\right)^2\right]}\right\} \end{array} \tag{38}$$

38 doit recouper 31.

On peut alors exprimer la variation de cette impédance lorsque l'on fait varier le coefficient de qualité. Il ne s'agit pas de modifier au premier ordre les modes, sans quoi une simplication ne sera pas possible, mais par exemple de modifier le métal des murs.

Dans le cas général on peut écrire :

$$\frac{\partial \mathcal{R}(Z_E)}{\partial R} = \frac{M^2\omega^2R^2\left[(L\omega - 1/C\omega)^2 - 2\right]}{\left[R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2\right]^2} \tag{39}$$

A la résonance où les énergies électrique et magnétique se compensent, cette variation se réduit à $-2M^2\omega^2/R^2$. On trouve donc qu'aux résonances, la partie réelle de l'impédance d'entrée doit décroître lorsque l'on augmente les pertes internes à la cavité. Ce résultat n'est pas du tout intuitif. Mais en regardant 35 on comprend qu'en augmentant R on diminue k^2 et de fait on diminue Z_E. La vue de la cavité au travers du couplage fausse les interprétations. Il faut de fait compléter l'étude du cas essentiel à trois corps.

7 Problème à trois réseaux

Soit ζ, σ, ξ les trois impédances de trois résonateurs couplés par des fonctions b_{ij}, si deux résonateurs sont assez éloignés pour n'interagir pas directement (l'hypothèse d'entrée), la métrique de ce problème a la forme suivante :

$$g = \begin{bmatrix} \zeta & b_{12} & 0 \\ b_{21} & \sigma & b_{23} \\ 0 & b_{32} & \xi \end{bmatrix} \tag{40}$$

On en déduit une expression du courant d'entrée :

$$k^1 = e\frac{\sigma\xi - b_{23}^2}{(\sigma\xi - b_{23}^2)\,\zeta - b_{12}^2\xi}$$

en symétrisant les couplages.

L'impédance d'entrée est toujours donnée par $e(k^1)^{-1} - R_0$ soit :

$$\frac{(\sigma\xi - b_{23}^2)\,\zeta - b_{12}^2\xi}{\sigma\xi - b_{23}^2} - R_0 \tag{41}$$

Soit encore :

$$\zeta - R_0 - \frac{b_{12}^2\xi}{\Sigma\xi - b_{23}^2}$$

Si $\mathcal{R}$, $\mathcal{X}$ représentent les parties réelles et imaginaires des impédances, si $b_{12} = b$ et $b_{23} = d$, on a pour Z_E :

$$\mathcal{R}_\zeta + i\mathcal{X}_\zeta - R_0 - \frac{(\mathcal{R}_b + i\mathcal{X}_b)^2(\mathcal{R}_\xi + i\mathcal{X}_\xi)}{(\mathcal{R}_\sigma + i\mathcal{X}_\sigma)(\mathcal{R}_\xi + i\mathcal{X}_\xi) - (\mathcal{R}_d + i\mathcal{X}_d)^2} \tag{42}$$

et une partie réelle $\mathcal{R}(Z_E)$:

$$\mathcal{R}_\zeta - R_0 - \left(\frac{AB + CD}{E^2 + F^2}\right) \tag{43}$$

avec :

$$\begin{cases} A = \mathcal{R}_b^2\mathcal{R}_\xi - \mathcal{X}_b^2\mathcal{R}_\xi - 2\mathcal{R}_b\mathcal{X}_b\mathcal{X}_\xi \\ B = \mathcal{R}_\sigma\mathcal{R}_\xi - \mathcal{X}_\sigma\mathcal{X}_\xi - \mathcal{R}_d^2 + \mathcal{X}_d^2 \\ C = 2\mathcal{R}_b\mathcal{X}_b\mathcal{R}_\xi - \mathcal{X}_b^2\mathcal{X}_\xi \\ D = \mathcal{R}_\sigma\mathcal{X}_\xi + \mathcal{X}_\sigma\mathcal{R}_\xi - 2\mathcal{R}_d\mathcal{X}_d \\ E = \mathcal{R}_b\mathcal{R}_\xi - \mathcal{X}_\sigma\mathcal{R}_\xi - \mathcal{R}_d^2 + \mathcal{X}_d^2 \\ F = \mathcal{R}_\sigma\mathcal{X}_\xi + \mathcal{X}_\sigma\mathcal{R}_\xi - 2\mathcal{R}_d\mathcal{X}_d \end{cases}$$

Les écarts entre 42 et 38 doivent donner la variation de partie réelle en entrée d'antenne lorsque l'on charge la CRBM. Ce peut être là une première piste de contrôle de la charge effective de la chambre. Mais la difficulté ici est que le remplissage de la chambre provoque aussi une modification des fréquences de modes. La comparaison est rendue ainsi strictement impossible sauf à accepter de comparer des valeurs à des fréquences différentes.

Regardons une autre piste en exprimant la puissance dissipée par la charge. Elle est donnée par $R_\xi k^3 k^{*3}$. k^3 est donné par :

$$k^3 = \frac{bd}{(\sigma\xi - d^2)\,\zeta - b^2\xi}e \tag{44}$$

Le numérateur de la puissance est donné par : $R_\xi(|b|\,|d|\,e)^2$. Le dénominateur du courant a pour partie réelle $\mathcal{R}_\zeta\left(\mathcal{R}_\sigma\mathcal{R}_\xi - \mathcal{X}_\sigma\mathcal{X}_\xi - \mathcal{R}_d^2 + \mathcal{X}_d^2\right) - \mathcal{X}_\zeta\left(\mathcal{X}_\sigma\mathcal{R}_\xi + \mathcal{R}_\sigma\mathcal{X}_\xi - 2\mathcal{R}_d\mathcal{X}_d\right)$ et pour partie imaginaire $\mathcal{X}_\zeta\left(\mathcal{R}_\sigma\mathcal{R}_\xi - \mathcal{X}_\sigma\mathcal{X}_\xi - \mathcal{R}_d^2 + \mathcal{X}_d^2\right) + \mathcal{R}_\zeta\left(\mathcal{X}_\sigma\mathcal{R}_\xi + \mathcal{R}_\sigma\mathcal{X}_\xi - 2\mathcal{R}_d\mathcal{X}_d\right)$. Pour que la puissance transmise soit au plus forte, il faut que le produit des modules des fonctions de couplages soit le plus grand possible, et que le module du dénominateur soit le plus petit possible. Les couplages résultent des produits scalaires des champs évanescents des objets insérés dans la chambre et des champs du mode dans la cavité. Pour diminuer le dénominateur on peut jouer sur les couplages : on a intérêt à les rendre le plus réel possible et sur la cavité. On peut annuler ses composantes imaginaires aux résonances. Si par ailleurs on essaie de rendre l'émetteur le plus rentable possible, en posant $\mathcal{X}_\sigma = 0,\ \mathcal{R}_\zeta = 0,\ \mathcal{X}_d = 0,\ \mathcal{X}_b = 0$ on trouve :

$$P = \frac{R_\xi \left(\mathcal{R}_b \mathcal{R}_d e\right)^2}{\left[\mathcal{X}_\zeta \left(\mathcal{R}_\sigma \mathcal{X}_\xi\right)\right]^2 + \left[\mathcal{X}_\zeta \left(\mathcal{R}_\sigma \mathcal{R}_\xi - \mathcal{R}_d^2\right)\right]^2}$$

Pour tendre vers ce résultat on doit avoir des couplages réels. Si les pertes dans la cavité sont très faibles on peut aussi augmenter la puissance. Tout l'apport d'une CRBM est là. Non dans l'obtention d'un champ élevé, car la valeur du champ ne présage en rien de la puissance transmise, mais dans la capacité de transmettre cette puissance via l'onde stationnaire établie et donc sans souffrir d'une atténuation en $1/r^2$.

8 CRBM

Comparée à une cavité simple, une CRBM est une cavité perturbée par la présence d'un brasseur. Le brasseur peut induire des zones de stockage localisées, il complique notablement le modèle de la cavité et les interactions entre les objets. Sinon, les grands principes discutés auparavant sont toujours valides. La CRBM peut être modélisée par un agencement de guides en interactions, méthode proposée par Collin. Une première zone de stockage peut ainsi servir de transmission d'énergie vers une deuxième zone qui elle, rentre en résonance. Il faut développer un modèle qui rende compte de ces fonctionnements pour ensuite comparer dans un cas précis pour commencer, les puissances absorbées en CRBM et dans l'environnement réel. Ces calculs et modélisations font partie des travaux à venir.

9 Références

1. C.Cohen-Tanoudji, J.Dupont-Roc, G.Grynberg, “Photons et atomes”. EDP Sciences, page30.
2. P.A.Martin, F.Rothen, “Problèmes à N-corps et champs quantiques”. Presses polytechniques et universitaires Romandes, page 23.
3. J.D.Jackson, “Classical Electrodynamics”. Edition Française chez Dunod, page 270.
4. R.P.Feynman, “Quantum electrodynamics”. Edition Wiley, pages 121 à 127.
5. J.J.Labarthe, “Travaux pratiques d'électromagnétisme”. Policopié de l'université Paris-Sud Orsay, Licence et Magistère de Physique. Exemple page 13.
6. O.Maurice, “La compatibilité électromagnétique des systèmes complexes”. Edition Hermès-Lavoisier. Page 161.
7. S.Dubois, O.Maurice, A.Reineix, “Réflexions sur les propriétés du champ modal”. Congrès CEM2010, Limoges.